MIERY ŠIKMOSTI (ASYMETRIE)

- rozdelenie početností v štatistickom súbore môže byť súmerné (symetrické), alebo nesúmerné (zošikmené doľava, doprava)
- miery šikmosti (asymetrie) sú hodnoty, ktoré charakterizujú rozsah zošikmenia
- najpoužívanejšie sú: šikmosť, Pearsonova miera šikmosti, koeficient šikmosti (asymetrie)

ŠIKMOSŤ $\check{S}$

- vychádza z predpokladu, že medzi kvartilmi je rovnaký počet prvkov, pričom pri zošikmených rozdeleniach táto rovnosť neplatí: $(\tilde{x} - \tilde{x}_{25}) = (\tilde{x}_{75} - \tilde{x})$

$$\check{S} = \frac{(\tilde{x}_{75} - \tilde{x}) - (\tilde{x} - \tilde{x}_{25})}{(\tilde{x}_{75} - \tilde{x}) + (\tilde{x} - \tilde{x}_{25})} = \frac{\tilde{x}_{75} + \tilde{x}_{25} - 2\tilde{x}}{\tilde{x}_{75} - \tilde{x}_{25}} = \frac{\tilde{x}_{75} + \tilde{x}_{25} - 2\tilde{x}}{2S_K}$$

S_K (alebo Q)– kvartilová odchýlka

- šikmosť nadobúda hodnoty <-1,1>, pričom ak je Š=0 je rozdelenie úplne symetrické, pri ľavostrannej asymetrii je šikmosť kladná a pri pravostrannej záporná

PEARSONOVA MIERA ŠIKMOSTI $\check{S}_p$ alebo τ (čítaj tau)

- vychádza zo vzťahu medzi aritmetickým priemerom, módom a mediánom
- rozdiel medzi aritmetickým priemerom a módom, vyjadrený počtom smerodajných odchýlok:

$$\check{S}_p = \frac{\bar{x} - \hat{x}}{s_x}$$

- pre nie príliš asymetrické rozdelenia sa vyjadruje:

$$\check{S}_p = \frac{3(\bar{x} - \tilde{x})}{s_x}$$

- $\check{S}_p$=0 pri úplne symetrickom rozdelení, je kladná pri ľavostrannej asymetrii a záporná pri pravostrannej asymetrii

KOEFICIENT ŠIKMOSTI (ASYMETRIE) γ_1 (čítaj gama)

- je momentová miera šikmosti, je to vlastne tretí moment normovanej premennej $\mu_{t,3}$
- normovaná (smerodajná) premenná vyjadruje odchýlky hodnôt znaku od priemeru a mernou jednotkou je smerodajná odchýlka
- tretí moment je stredná hodnota výrazu $(X-a)^3$

moment tretieho stupňa v empirickom štatistickom súbore: $\mu_{x,3} = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^3 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$

$$\gamma_1 = \mu_{t,3} = \frac{\mu_{x3}}{s_x^3}$$

- o jeho hodnotách platí to isté, čo o hodnotách Pearsonovej šikmosti

*!! STRUČNÉ POZNÁMKY K **TEÓRII MOMENTOV**:*
- momenty možno vo všeobecnosti charakterizovať ako funkcie všetkých hodnôt znaku v skúmanom súbore

Mgr. Adriana Zlacká
Katedra geografie a geoekológie, FHPV PU v Prešove
azlacka@unipo.sk

Všeobecné momenty: $\mu'_{x,k}$ (čítaj mikrón) *alebo* $m'_{x,k}$
- všeobecný moment k-tého stupňa (k-tý všeobecný moment) premennej veličiny X je stredná hodnota výrazu (X-a)^k , kde X - náhodná premenná, a – ľubovoľne zvolené číslo
- všeobecný moment k-tého stupňa v empirickom štatistickom súbore:

$$\mu'_{x,k} = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - a)^k \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

Centrálne momenty: $\mu_{x,k}$ *alebo* $m_{x,k}$
- centrálny moment k-tého stupňa (k-tý centrálny moment) v empirickom štatistickom súbore vyjadruje kolísanie hodnôt okolo aritmetického priemeru:

$$\mu_{x,k} = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{x})^k \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

- druhý centrálny moment je rozptyl (disperzia), tretí sa používa na charakterizovanie šikmosti a štvrtý na charakterizovanie špicatosti
Normované momenty *(momenty smerodajnej premennej):*
- normovaná premenná (smerodajná premenná) vyjadruje odchýlky hodnôt znaku od priemeru, pričom mernou jednotkou je smerodajná odchýlka:

$$t_i = \frac{x_i - \overline{x}}{s_x}$$

- normovaný moment k-tého stupňa (k-tý moment normovanej premennej):

$$\mu_{t,k} = \frac{\mu_{x,k}}{s_x^k}$$

MIERY ŠPICATOSTI

- hodnoty, ktoré charakterizujú sústredenie početnosti okolo nejakej hodnoty znaku
- čím sú početnosti viac sústredné okolo konkrétnej hodnoty znaku, tým je vrchol rozdelenia početností výraznejší, teda špicatejší
- pri hodnotení špicatosti sa vychádza z normálneho rozdelenia

KOEFICIENT ŠPICATOSTI $\gamma 2$

- Východiskom pre meranie špicatosti je štvrtý moment normovanej premennej. Pri normálnom rozdelení je rovný 3, avšak ak chceme aby sa miera špicatosti pre toto rozdelenie rovnala nule, musíme odpočítať od neho 3.
- koeficient špicatosti je teda štvrtý moment normovanej premennej $\mu_{t,4}$ zmenšený o 3

$$\gamma_2 = \mu_{t,4} - 3 = \frac{\mu_{x,4}}{s_x^4} - 3$$

- koeficient špicatosti sa pre normálne rozdelenie rovná 0, pre plochejšie je záporný a pre špicatejšie rozdelenie je kladný, špicatosť je tým väčšia, čím viac sa líši koeficient od nuly

MIERY KONCENTRÁCIE

- hodnoty, ktoré charakterizujú podiel štatistických jednotiek na celkovom úhrne hodnôt znaku v súbore
- miery koncentrácie hodnôt znaku majú význam najmä pri výskume rozmiestnenia obyvateľov, koncentrácie priemyslu, obchodnej siete a pod.

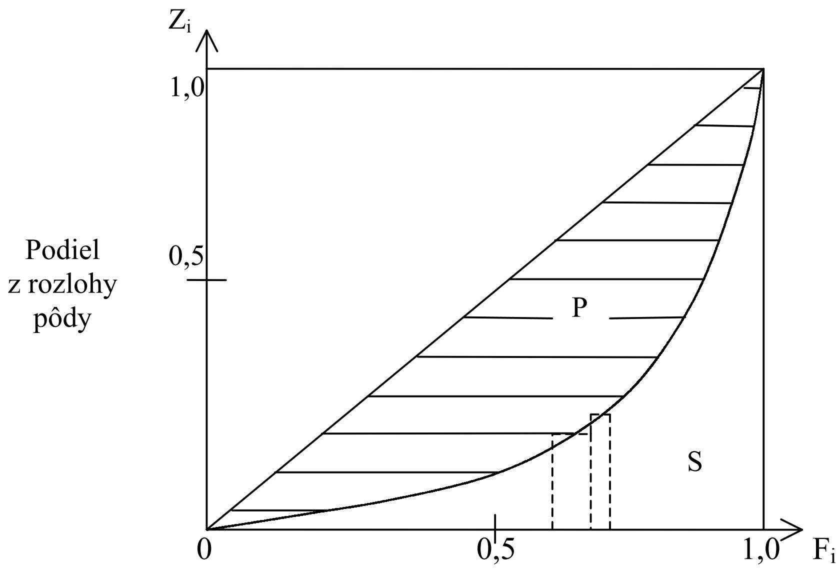
- na celkovom úhrne hodnôt znaku v súbore sa r-tá štatistická jednotka podieľa časťou, ktorú vyjadruje podiel:

$$\frac{x_r}{\sum_{j=1}^{n} x_j}$$

- ak je štatistický súbor rozdelený do *m* intervalov, potom je **kumulatívny podiel** 1 až r-tého intervalu na celkovom úhrne hodnôt znaku v súbore:

$$Z_r = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}}{n}$$

- j =1,2,...,n_i a r =1,2,..,m
- koncentrácia hodnôt znaku v súbore sa často graficky znázorňuje tzv. **Lorenzovou krivkou**, ktorej súradnice sú kumulatívne relatívne početnosti a kumulatívne podiely intervalov na úhrne hodnôt znaku v súbore.



Obr.: Lorenzova krivka (pr. Koncentrácie pôdy v lesných závodoch istej krajiny)

- čím väčšia je plocha medzi krivkou a uhlopriečkou, tým vyšší je stupeň koncentrácie. Ak by boli všetky hodnoty znaku rovnaké, Lorenzova krivka by bola zhodná s uhlopriečkou.

KOEFICIENT KONCENTRÁCIE (KONCENTRAČNÝ KOEFICIENT)

- podiel plochy, ohraničenej Lorenzovou krivkou a uhlopriečkou v štvorci koncentrácie

$$G_x = K_k = \frac{P}{T} = \frac{0{,}5 - S}{0{,}5} = 1 - 2S$$

P – plocha ohraničená diagonálou a Lorenzovou krivkou
T- plocha trojuholníka, T=0,5
S=T-P
- plochu S vypočítame ako súčet plôch obdĺžnikov, ktorých strany sú f_i a ½(Z_{i-1}+Z_i)

$$K_k = 1 - \sum_{i=1}^{m} f_i\left(Z_{i-1} + Z_i\right)$$

Mgr. Adriana Zlacká
Katedra geografie a geoekológie, FHPV PU v Prešove
azlacka@unipo.sk

ČASOVÉ RADY

- časové rady predstavujú chronologicky usporiadané údaje o skúmanom jave za jednotlivé časové obdobia
- charakterizujú sa pomocou mier rastu a pomocou upravených vzorcov pre výpočet aritmetického a geometrického priemeru

♦ INTERVALOVÉ ČASOVÉ RADY

- sú tvorené hodnotami, ktoré charakterizujú jav za určitý časový úsek (počet narodených za rok), tieto hodnoty sa označujú ako intervalové (napr. odpracované hodiny, počet narodených a zomrelých, mzdové fondy, tržby, obrat v určitom období)

➢ súčtové (kumulatívne) rady

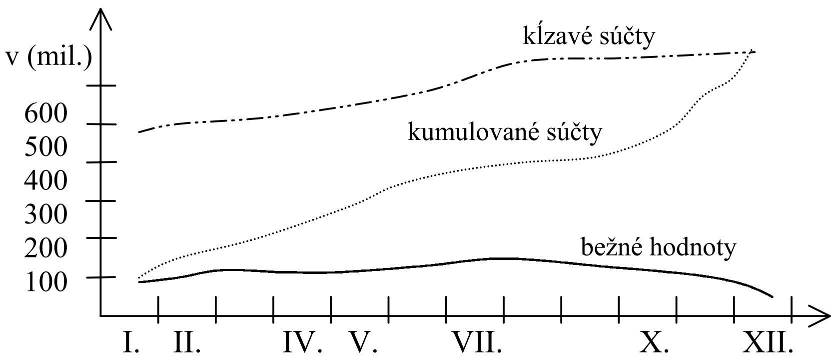
- ak chceme sledovať zmeny hodnôt nielen podľa jednotlivých období, ale súčasne aj za všetky sledované obdobia postupne od prvého až po posledné, vytvárame z intervalových časových radov súčtové kumulatívne rady

➢ kĺzavé súčty (úhrny)

- ak skúmame hodnotu javu za obdobie kratšie ako rok (napr. mesačné hodnoty), môžeme zistiť ako sa údaje za jednotlivé mesiace skúmaného roka zmenili v porovnaní s tými istými mesiacmi predchádzajúceho roka, používame na to kĺzavé súčty (úhrny)
- rad kĺzavých súčtov vytvoríme tak, že vychádzame zo súčtu 12 mesiacov predchádzajúceho roka a tento súčet postupne posúvame o jedno obdobie tak, že od neho odpočítame údaj za január predchádzajúceho roka a nahradíme ho januárom nasledujúceho roka. Pri tvorbe ďalšie kĺzavého súčtu vylúčime február predchádzajúceho roka a nahradíme ho februárom nasledujúceho roka atď.

➢ Z – diagram

- je v ňom súčasne znázornený grafický priebeh troch radov hodnôt – bežných, kumulovaných a kĺzavých súčtov (grafické znázornenie čiar vyjadrujúcich priebeh troch druhov hodnôt, pripomína písmeno „z“)
- graf umožňuje porovnávať bežné údaje s údajmi v minulom období a súčasne ukazuje vývoj od začiatku roka za dané kratšie časové obdobia



Obr. : Z – diagram (pr. Príjmy za poskytnuté služby rekreačnými zariadeniami v meste N, v určitom roku)

♦ MOMENTOVÉ ČASOVÉ RADY

- sú tvorené hodnotami, ktoré charakterizujú úroveň javu k istému momentu, tieto hodnoty sa označujú ako momentové (napr. počet obyvateľov k istému dátumu, počet zamestnancov)

➢ chronologický priemer

- používa sa na charakteristiku priemerného stavu z údajov momentového časového radu
- upravený aritmetický priemer
- počítame priemer z dvoch časovo susedných momentových hodnôt a tým charakterizujeme časový úsek medzi nimi (vytvoríme z nich vlastne intervalové veličiny) a potom z týchto čiastkových priemerov počítame aritmetický priemer

Mgr. Adriana Zlacká
Katedra geografie a geoekológie, FHPV PU v Prešove
azlacka@unipo.sk

$$\bar{x}_{ch} = \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 + x_3}{2} + \ldots + \frac{x_{n-1} + x_n}{2}}{n-1}$$

po úprave:

$$\bar{x}_{ch} = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + \frac{x_t}{2}}{n-1}$$

- napr. výpočet priemernej dennej teploty

$$\bar{x} = \frac{\frac{x_0}{2} + x_1 + x_2 + \ldots x_{23} + \frac{x_{24}}{2}}{24}$$

- 0-tá hodina je totožná s 24-tou hodinou, preto ako rozsah súboru sa počíta *n-1*, t.j. 24

- **vážený chronologický priemer**

- používa sa pre momentové časové rady s nerovnako veľkými intervalmi medzi jednotlivými momentovými hodnotami

$$\bar{x}_{ch} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} d_i} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot d_i + \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2) \cdot d_2 + \ldots + \frac{1}{2} \cdot (x_{n-2} + x_{n-1}) \cdot d_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot x_n \cdot d_n \right)$$

d_i – dĺžky medzi jednotlivými momentovými časovými hodnotami

♦ **MIERY RASTU**

- hodnoty, ktoré charakterizujú rýchlosť rastu alebo poklesu hodnôt časového radu

1. ABSOLÚTNE MIERY RASTU

- podávajú informácie o absolútnej zmene hodnôt časového radu

ABSOLÚTNY PRÍRASTOK

- charakterizuje rozdiel dvoch za sebou idúcich hodnôt

$$a_j = x_{i+1} - x_i$$

kde i=0,1,....,n a j=i+1

ZRÝCHLENIE ABSOLÚTNEHO PRÍRASTKU

- rozdiel dvoch za sebou idúcich absolútnych prírastkov

$$z_j = a_{i+1} - a_i$$

kde i=0,1,....,n a j=i+1

- obidva ukazovatele môžu nadobúdať nulovú hodnotu (nulový prírastok, nulové zrýchlenie prírastku) i zápornú hodnotu (negatívny prírastok, resp. pokles, spomalenie absolútneho prírastku)

2. RELATÍVNE MIERY RASTU

- získavajú sa ako podiel hodnôt momentového alebo intervalového časového radu

KOEFICIENT RASTU
- základná relatívna miera rastu

- vyjadruje sa ako podiel dvoch susedných hodnôt: $r = \frac{x_{i+1}}{x_i}$

- vyjadruje sa desatinným číslom

- ak sa vyjadruje v %, označuje sa ako **TEMPO RASTU**
- ak r > 100% (alebo 1) rast je **pozitívny**
- ak r < 100% rast je **negatívny**
- ak r = 100% rast je **nulový**

KOEFICIENT PRÍRASTKU
- odvodzuje sa z koeficientu rastu, jeho zmenšením o jednu celú

p = r - 1

- ak sa vyjadruje v %, označuje sa ako **TEMPO PRÍRASTKU**

p % = r % - 100 %

PRIEMERNÝ KOEFICIENT RASTU
- z jednotlivých koeficientov rastu možno stanoviť priemerný koeficient rastu
- na zistenie priemernej hodnoty z hodnôt, ktoré narastajú nelineárne, teda exponenciálne (mocninovo) sa používa geometrický priemer
- pre praktické použitie sa upravuje logaritmovaním a pre zlogaritmovaný vzorec sa používa jeho zjednodušený ekvivalent

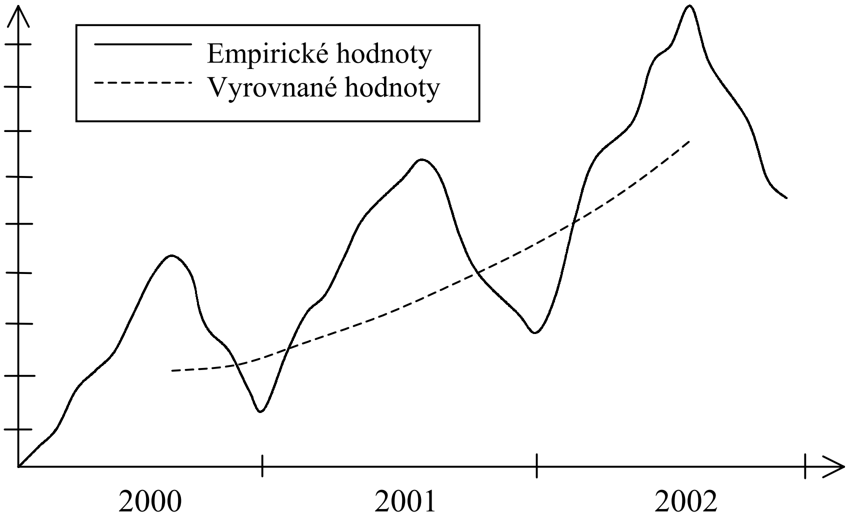
$$p = \frac{\log P_n - \log P_0}{n \cdot \log e}$$

p - priemerný prírastok
n - počet rokov (časové obdobie)
P_0 - počiatočná (nultá) hodnota (prvý rok sa začína až za ňou)
P_n – konečná hodnota
log *e* = 0,43429
- pri počítaní logaritmov na kalkulačke, ktorá má iba funkciu *ln* (prirodzený logaritmus), musíme použiť prepočet:

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

♦ **METÓDA KĹZAVÝCH PRIEMEROV**
- pri výskume vývoja v časových radoch nás zaujíma nie len vývoj hodnôt sledovaného javu z roka na rok, ale aj celková tendencia vývoja za viaceré roky
- hlavný smer, resp. tendenciu vývoja časového radu môžeme charakterizovať pomocou tzv. **vyrovnávajúcej čiary** (čiara, ktorá graficky vyjadruje vývoj bez vplyvu extrémnych hodnôt (sezónnych výkyvov)
- vyrovnávajúcu čiaru je možné vytvoriť mechanicky alebo analyticky
- mechanická metóda vyrovnávania časových radov sa označuje ako metóda kĺzavých priemerov
- je jednoduchá a zároveň podáva rýchlu informáciu o tendencii vývoja časového radu zbavenej sezónnych, či cyklických výkyvov
- kĺzavé priemery získame z kĺzavých súčtov a to tak, že kĺzavé súčty delíme počtom období, súčtom ktorých vznikli

- jednotlivé kĺzavé priemery priraďujeme vždy k prostrednému z období, ktorých súčet bol použitý za základ pre stanovenie zodpovedajúcich kĺzavých súčtov



Obr.: Vyrovnanie časového radu pomocou kĺzavých priemerov.

Mgr. Adriana Zlacká
Katedra geografie a geoekológie, FHPV PU v Prešove
azlacka@unipo.sk