STREDNÉ HODNOTY (MOMENTY POLOHY)

- Stredné hodnoty sú súhrnné, zovšeobecňujúce, reprezentatívne číselné hodnoty, ktoré charakterizujú jednotlivé hodnoty skúmaného štatistického znaku. Môžu to byť hodnoty, ktoré sú pre štatistický súbor typické, najčastejšie alebo hodnoty, okolo ktorých sú rozložené všetky ostatné hodnoty.
- Umožňujú jednoduché a prehľadné porovnávanie skúmaného javu v dvoch aj viacerých štatistických súboroch na všeobecnej úrovni.
- Označujú sa aj ako momenty polohy, pretože jedným číslom udávajú polohu skúmaného súboru na osi x.
- Rozdeľujú sa do dvoch skupín:

1. stredné hodnoty, ktorých veľkosť závisí od hodnôt znaku všetkých jednotiek súboru
2. stredné hodnoty, ktorých veľkosť nie je závislá od hodnôt znaku všetkých jednotiek súboru

STREDNÉ HODNOTY ZÍSKANÉ VÝPOČTOM ZO VŠETKÝCH HODNÔT RADU

Veľkosť takýchto stredných hodnôt závisí od veľkosti hodnôt znaku všetkých jednotiek súboru. Túto skupinu reprezentujú **priemery**.

ARITMETICKÝ PRIEMER $\overline{x}$

- najčastejšie používaný priemer

VÝPOČET ARITMETICKÉHO PRIEMERU:

♦ **jednoduchá forma**

- súčet všetkých hodnôt kvantitatívneho znaku delený počtom týchto hodnôt, teda rozsahom súboru

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{n}$$

♦ **vážená forma**

- ak sú hodnoty usporiadané do radov početností a radov skupinového rozdelenia početností, využíva sa viacnásobný výskyt rovnakej hodnoty, a teda rovnaké hodnoty nesčitujeme, ale násobíme ich počtom:

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + ... + x_k \cdot n_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{n}$$

❑ Pri **skupinovom rozdelení početností** sa hodnota x_i získa ako aritmetický stred intervalu.

Aritmetický stred intervalu:

$$s = \frac{(x_{\max} + x_{\min})}{2}$$

- súčet hraníc intervalu, teda maximálnej a minimálnej hodnoty, sa delí dvoma
- teoretická hodnota, nahradzujúca všetky hodnoty z daného intervalu (platí to len v prípade, ak je rozdelenie početností v intervale relatívne spojité, nie extrémne skokovité)

Šírka intervalu (rozsah): $h = x_{max} - x_{min} + 1$

- rozdiel medzi maximálnou a minimálnou hodnotou intervalu, ku ktorému sa pripočíta jedna celá

❑ **Metóda vhodne zvoleného počiatku**

- zjednodušený výpočet aritmetického priemeru
- metóda vychádza z vlastnosti aritmetického priemeru, že ak pripočítame, odpočítame, vydelíme, alebo znásobíme každú hodnotu súboru konštantou, aj hodnota aritmetického priemeru sa zväčší, zmenší, vydelí, znásobí o túto konštantu.

Mgr. Adriana Zlacká
Katedra geografie a geoekológie, FHPV PU v Prešove
azlacka@unipo.sk

- pri aplikácii tejto metódy postupujeme tak,
  - že zmenšíme všetky hodnoty znaku o konštantu a (zväčša stred toho intervalu, ktorý je blízky hodnote hľadaného priemeru) a takto zmenšené hodnoty delíme konštantou h (zväčša je to šírka intervalu), konštanty volíme tak, aby nová premenná mala priemer blízky nule a aby rozdiely medzi stredmi intervalov boli jednotkové
  - vytvoríme novú premennú, ktorú vyjadríme vzťahom:

$$z_i = \frac{x_i - a}{h}$$

  - vypočítame aritmetický priemer tejto pomocnej premennej:

$$\bar{z}_i = \frac{\bar{x}_i - a}{h}$$

  - takto dosiahneme vážený priemer pôvodných hodnôt:

$$\bar{x} = \bar{z} \cdot h + a$$

HARMONICKÝ PRIEMER $\bar{x}_h$

- používa sa vtedy, keď je medzi hodnotami znaku a výsledným javom nepriamy vzťah, t.j. keď sú váhy hodnôt znaku dané nepriamo

♦ **jednoduchá forma**

- harmonický priemer je prevrátenou hodnotou aritmetického priemeru prevrátených hodnôt znaku $\left(\frac{1}{x_i}\right)$

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_k}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i}}$$

♦ **vážená forma**

- ak máme vyjadrené aj početnosti hodnôt znaku

$$\bar{x}_h = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{\frac{1}{x_1} \cdot n_1 + \frac{1}{x_2} \cdot n_2 + \ldots + \frac{1}{x_k} \cdot n_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i}}$$

GEOMETRICKÝ PRIEMER $\bar{x}_g$

♦ **jednoduchá forma:**

- geometrický priemer sa používa v prípadoch, kedy má reálny zmysel súčin hodnôt skúmaného znaku
- využíva pri výpočte priemerného, resp. plánovaného tempa rastu (napr. počtu obyvateľov miest)

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{k} x_i}$$

♦ **vážená forma:**

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i}}$$

n - rozsah súboru

- geometrický priemer sa niekedy nazýva aj ***LOGARITMICKÝ PRIEMER***
- odmocniny vyšších rádov sa počítajú komplikovane, preto sa pre výpočet geometrického priemeru využíva logaritmovanie
- dostaneme ho zlogaritmovaním pôvodného výrazu:

Mgr. Adriana Zlacká
Katedra geografie a geoekológie, FHPV PU v Prešove
azlacka@unipo.sk

♦ **jednoduchá forma**

$$\log \bar{x}_g = \frac{1}{n} \cdot \left(\log x_1 + \log x_2 + ... + \log x_n \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} \log x_i$$

♦ **vážená forma**

$$\log \bar{x}_g = \frac{n_1 \cdot \log x_1 + n_2 \cdot \log x_2 + ... + n_k \cdot \log x_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \log x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

STREDNÉ HODNOTY ZÍSKANÉ VÝPOČTOM IBA Z NIEKTORÝCH HODNÔT RADU

Niekedy pri štatistickom rozbore nastane situácia, kedy priemery dostatočne necharakterizujú štatistický súbor:

- ich hodnoty sú výrazne ovplyvnené extrémnymi hodnotami súboru
- nepoznáme hodnoty všetkých prvkov súboru.

Vtedy je potrebné použiť iné stredné hodnoty, ktoré nie sú odvodené zo všetkých údajov súboru, ale iba z niektorých hodnôt.

KVANTILY

- Stredné hodnoty, ktoré rozdeľujú štatistický súbor na rovnaké časti.
- Označujú sa podľa toho, na koľko častí rozdeľujú súbor:

medián – rozdeľuje súbor na dve rovnaké časti
kvartily – rozdeľujú súbor na 4 rovnaké časti
sextily – na 6 častí
decily – na 10 častí
percentily – na 100 častí

MEDIÁN $\tilde{x}$ alebo $\boldsymbol{x_{Me}}$ (z lat. medius – prostredný)

- stredná hodnota, ktorá rozdeľuje štatistický súbor na dve rovnako početné časti, teda na polovice
- jeden z kvantilov
- výhodou mediánu je, že je necitlivý voči extrémnym hodnotám a že jeho určenie je veľmi jednoduché, pretože nepotrebujeme poznať všetky hodnoty súboru

VÝPOČET MEDIÁNU VŠTATISTICKOM SÚBORE:

a) s nepárnym počtom jednotiek:

- medián je reálna hodnota
- je to hodnota r-tej štatistickej jednotky,

$$\tilde{x} = x_r$$

ktorej poradie vypočítame podľa:

$$r = \frac{n+1}{2}$$

b) s párnym počtom jednotiek:

- medián je teoretická hodnota
- je to polovica súčtu hodnoty znaku r-tej a (r+1)-ej štatistickej jednotky,

$$\tilde{x} = \frac{x_r + x_{r+1}}{2}$$

pričom

$$r = \frac{n}{2}$$

c) pre intervalové rozdelenie početností:
- bezprostredne je možné určiť iba mediánový interval, t.j. interval do ktorého patrí x_r a x_{r+1}
- konkrétne hodnoty mediánového intervalu nie sú známe, a tak sa medián určí lineárnou interpoláciou:

1. pre relatívne početností:

$$\tilde{x} = a + h \cdot \frac{0{,}5 - \sum_{i=1}^{r-1} f_i}{f_{\tilde{x}}}$$

a - dolná hranica mediánového intervalu

h - šírka mediánového intervalu

$\sum_{i=1}^{r-1} f_i$ - kumulatívna relatívna početnosť po mediánový interval

$f_{\tilde{x}}$ - relatívna početnosť mediánového intervalu

2. pre absolútne početností:

$$\tilde{x} = a + h \cdot \frac{\frac{n+1}{2} - \sum_{i=1}^{r-1} n_i}{n_{\tilde{x}}}$$

$\sum_{i=1}^{r-1} n_i$ - kumulatívna absolútna početnosť po mediánový interval

$n_{\tilde{x}}$ - absolútna početnosť mediánového intervalu

KVARTILY

- dolný kvartil $\mathbf{x_{Q1}}$($\tilde{x}_{25}$) alebo ($Q_1^{(4)}$), medián, horný kvartil $\mathbf{x_{Q3}}$ ($\tilde{x}_{75}$ alebo $Q_3^{(4)}$)
- ¼ hodnôt je menšia ako dolný kvartil a ¾ hodnôt sú väčšie ako horný kvartil, ináč sú výpočty analogické ako pre medián

MODUS $\hat{x}$ alebo x_{Mo} (z lat. modus – spôsob, miera)

- **najčastejšie** sa vyskytujúca hodnota štatistického súboru, teda hodnota s **najvyššou** (maximálnou) **početnosťou**.
- na grafe rozdelenia početností pri jednovrcholovom rozdelení - je modus x-ovou súradnicou jeho vrcholu
- pri dvojvrcholových rozdeleniach možno obidva vrcholy krivky pokladať za modus, aj keď vrcholy nie sú rovnako vysoké – tzv. bimodálne rozdelenia
- pri niektorých typoch nemá zmysel hovoriť o móde (keď krivka rozdelenia početností nemá nijaký vrchol) – tzv. antimodálne rozdelenia

URČENIE MÓDU ZO SKUPINOVÉHO ROZDELENIA POČETNOSTÍ

Pri skupinovom rozdelení početností, priamo sa určí iba **modálny interval**, t.j. interval s maximálnou početnosťou. O polohe módu v najpočetnejšom intervale sa predpokladá, že jeho vzdialenosť od dolnej, resp. hornej hranice je úmerná rozdielom medzi najväčšou početnosťou a početnosťou predchádzajúceho, príp. nasledujúceho intervalu. Polohu módu v modálnom intervale je možné určiť dvoma spôsobmi:

a) **Výpočtom:**

1. pre rovnako veľké intervaly

$$\hat{x} = s_{Mo} - \frac{h_{Mo}}{2} \cdot \frac{n_{Mo-1} - n_{Mo+1}}{n_{Mo+1} + n_{Mo-1} + 2 \cdot n_{Mo}}$$

s_{Mo}-stred modálneho intervalu

h_{Mo} - šírka modálneho intervalu

n_{Mo} – početnosť modálneho intervalu

n_{Mo-1} – početnosť intervalu nachádzajúceho sa pred modálnym intervalom

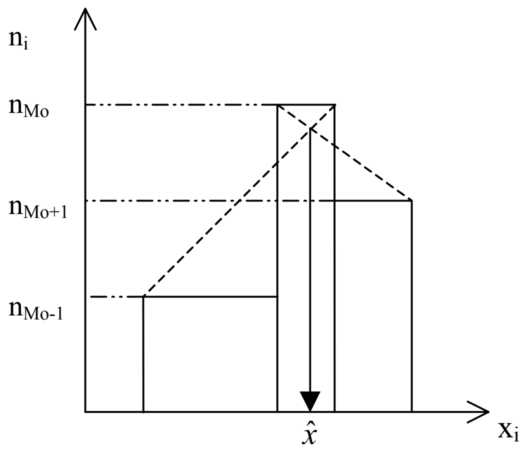
n_{Mo+1} – početnosť intervalu nachádzajúceho sa za modálnym intervalom

2. pre nerovnako veľké intervaly

- jednotlivé početností intervalov sa násobia šírkou týchto intervalov

$$\hat{x} = s_{Mo} - \frac{h_{Mo}}{2} \cdot \frac{n_{Mo-1}.h_{Mo-1} - n_{Mo+1} \cdot h_{Mo+1}}{n_{Mo+1} \cdot h_{Mo+1} + n_{Mo-1} \cdot h_{Mo-1} + 2 \cdot n_{Mo} \cdot h_{Mo}}$$

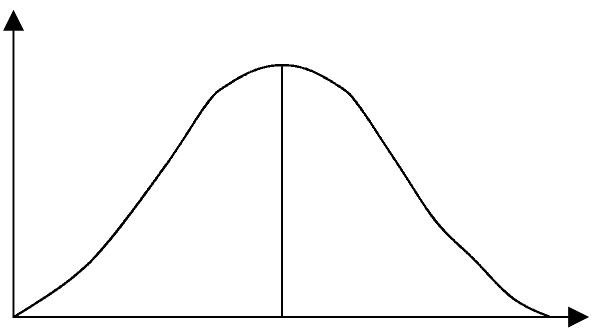
b) **Graficky** - pomocou histogramu



Obr.: Grafické určenie módu z histogramu.

VZŤAHY MEDZI STREDNÝMI HODNOTAMI

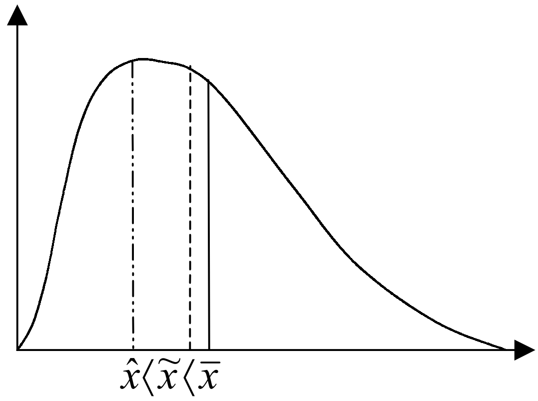
- vzájomná poloha modusu, mediánu a aritmetického priemeru v štatistickom súbore
- vzdialenosť medzi aritmetickým priemerom, mediánom a módom určitým spôsobom charakterizuje asymetriu štatistického súboru a môže sa stať východiskom pri konštrukcii mier asymetrie
- čím je rozloženie početností súmernejšie, tým menej sa líši úroveň aritmetického priemeru, mediánu a módu.
- ak je rozdelenie početností v súbore úplne symetrické vzhľadom na určitú hodnotu znaku x_i=a, ktorá sa v súbore vyskytuje najčastejšie, potom:

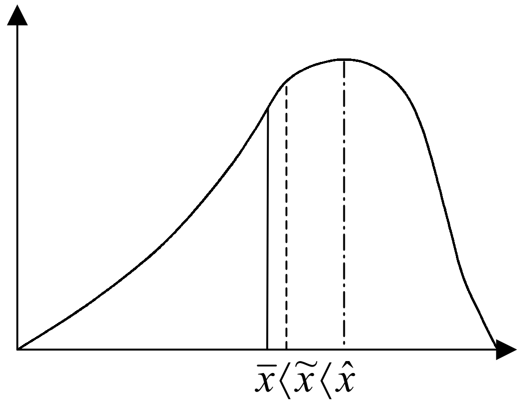


Obr.: Symetrické rozdelenie (schéma): $\overline{x} = \hat{x} = \tilde{x}$

Mgr. Adriana Zlacká
Katedra geografie a geoekológie, FHPV PU v Prešove
azlacka@unipo.sk

- ak je rozdelenie asymetrické je aritmetický priemer vzhľadom na modus posunutý smerom k zošikmenej časti krivky rozdelenia početností a medián je približne v tretine vzdialenosti od aritmetického priemeru smerom k módu:





Obr.: Ľavostranne asymetrické rozdelenie Pravostranne asymetrické rozdelenie (negatívne)

Približne platí vzťah: $\hat{x} = \bar{x} - 3 \cdot (\bar{x} - \tilde{x})$, ktorý možno využiť na približné určenie módu v štatistickom súbore.

Mgr. Adriana Zlacká
Katedra geografie a geoekológie, FHPV PU v Prešove
azlacka@unipo.sk